2.2 基本不等式

我们知道，乘法公式在代数式的运算中有重要作用. 那么，是否也有一些不等式，它们在解决不等式问题时有着与乘法公式类似的重要作用呢？下面就来研究这个问题.

前面我们利用完全平方公式得出了一类重要不等式：

$\forall a$，$b\in\mathbf{R}$，有

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

特别地，如果 $a>0$，$b>0$，我们用 $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ 分别代替上式中的 a，b，可得

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2},\tag{1}$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

通常称不等式（1）为**基本不等式**（basic inequality）. 其中，$\frac{a+b}{2}$ 叫做正数 a，b 的算术平均数，$\sqrt{ab}$ 叫做正数 a，b 的几何平均数.

基本不等式表明：两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数.

上面通过考察 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 的特殊情形获得了基本不等式. 能否直接利用不等式的性质推导出基本不等式呢？下面我们来分析一下.

要证

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2},\qquad ①$$

只要证

$$2\sqrt{ab}\leqslant a+b.\qquad ②$$

要证②，只要证

$$2\sqrt{ab}-a-b\leqslant 0.\qquad ③$$

要证③，只要证

$$-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\leqslant 0.\qquad ④$$

要证④，只要证

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0\ .\qquad ⑤$$

显然，⑤成立，当且仅当 $a=b$ 时，⑤中的等号成立.

只要把上述过程倒过来，就能直接推出基本不等式了.

探究

在图 2.2-1 中，AB 是圆的直径，点 C 是 AB 上一点，$AC=a$，$BC=b$. 过点 C 作垂直于 AB 的弦 DE，连接 AD，BD. 你能利用这个图形，得出基本不等式的几何解释吗？

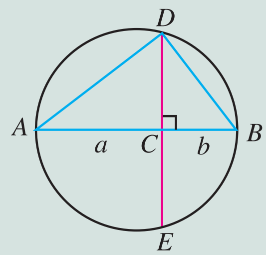

图 2.2-1

如图 2.2-1，可证$\triangle ACD \backsim \triangle DCB$，因而 $CD=\sqrt{ab}$. 由于 CD 小于或等于圆的半径，用不等式表示为

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

显然，当且仅当点 C 与圆心重合，即当 $a=b$ 时，上述不等式的等号成立.

例 1 已知 $x>0$，求 $x+\frac{1}{x}$的最小值.

分析： 求 $x+\frac{1}{x}$ 的最小值，就是要求一个 $y_0\left(=x_0+\frac{1}{x_0}\right)$，使 $\forall x>0$，都有 $x+\frac{1}{x}\geqslant y_0$. 观察 $x+\frac{1}{x}$，发现 $x\cdot\frac{1}{x}=1$. 联系基本不等式，可以利用正数 x 和$\frac{1}{x}$的算术平均数与几何平均数的关系得到 $y_0=2$.

解： 因为 $x>0$，所以

$$x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2,$$

当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x^2=1$，$x=1$ 时，等号成立，因此所求的最小值为 2.

在本题的解答中，我们不仅明确了 $\forall x>0$，有 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，而且给出了“当且仅当 $x=\frac{1}{x}$，即 $x^2=1$，$x=1$ 时，等号成立”，这是为了说明 2 是 $x+\frac{1}{x}(x>0)$的一个取值. 想一想，当 $y_0<2$ 时，$x+\frac{1}{x}\geqslant y_0$ 成立吗？这时能说 y_0 是 $x+\frac{1}{x}(x>0)$的最小值吗？

例 2 已知 x，y 都是正数，求证：

（1）如果积 xy 等于定值 P，那么当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$；

（2）如果和 $x+y$ 等于定值 S，那么当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值$\frac{1}{4}S^2$.

证明：因为 x，y 都是正数，所以

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}.$$

（1）当积 xy 等于定值 P 时，

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{P},$$

所以

$$x+y\geqslant 2\sqrt{P},$$

当且仅当 $x=y$ 时，上式等号成立．于是，当 $x=y$ 时，和 $x+y$ 有最小值 $2\sqrt{P}$．

（2）当和 $x+y$ 等于定值 S 时，

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{S}{2},$$

所以

$$xy\leqslant\frac{1}{4}S^2,$$

当且仅当 $x=y$ 时，上式等号成立．于是，当 $x=y$ 时，积 xy 有最大值 $\frac{1}{4}S^2$．

练习

1. 已知 a，$b\in\mathbf{R}$，求证 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$．
2. 已知 x，y 都是正数，且 $x\neq y$，求证：

   （1）$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}>2$；　　（2）$\frac{2xy}{x+y}<\sqrt{xy}$．
3. 当 x 取什么值时，$x^2+\frac{1}{x^2}$ 取得最小值？最小值是多少？
4. 已知 $-1\leqslant x\leqslant 1$，求 $1-x^2$ 的最大值．
5. 已知直角三角形的面积等于 50 cm^2，当两条直角边的长度各为多少时，两条直角边的和最小？最小值是多少？