# 5.2 三角函数的概念

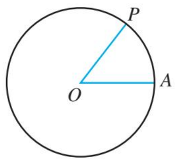

图 5.2-1

在弧度制下，我们已经将角的范围扩展到全体实数. 下面借助这些知识研究上一节开头提出的问题. 不失一般性，先研究单位圆上点的运动. 现在的任务是：

如图 5.2-1，单位圆⊙$O$ 上的点 $P$ 以 $A$ 为起点做逆时针方向旋转，建立一个数学模型，刻画点 $P$ 的位置变化情况.

## 5.2.1 三角函数的概念

根据研究函数的经验，我们利用直角坐标系来研究上述问题.

如图 5.2-2，以单位圆的圆心 $O$ 为原点，以射线 $OA$ 为 $x$ 轴的非负半轴，建立直角坐标系，点 $A$ 的坐标为 $(1, 0)$，点 $P$ 的坐标为 $(x, y)$. 射线 $OA$ 从 $x$ 轴的非负半轴开始，绕点 $O$ 按逆时针方向旋转角 $\alpha$，终止位置为 $OP$.

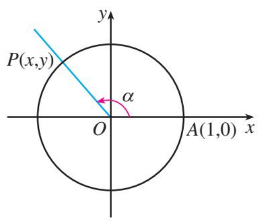

图 5.2-2

### 探究

当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，点 $P$ 的坐标是什么？当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 时，点 $P$ 的坐标又是什么？它们是唯一确定的吗？

一般地，任意给定一个角 $\alpha$，它的终边 $OP$ 与单位圆交点 $P$ 的坐标能唯一确定吗？

利用勾股定理可以发现，当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时，点 $P$ 的坐标是 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$；当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 时，点 $P$ 的坐标分别是 $(0, 1)$ 和 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 它们都是唯一确定的.

一般地，任意给定一个角 $\alpha\in\mathbf{R}$，它的终边 $OP$ 与单位圆交点 $P$ 的坐标，无论是横坐标 $x$ 还是纵坐标 $y$，都是唯一确定的. 所以，点 $P$ 的横坐标 $x$、纵坐标 $y$ 都是角 $\alpha$ 的函数. 下面给出这些函数的定义.

设 $\alpha$ 是一个任意角，$\alpha\in\mathbf{R}$，它的终边 $OP$ 与单位圆相交于点 $P(x, y)$.

（1）把点 $P$ 的纵坐标 $y$ 叫做 $\alpha$ 的**正弦函数**（sine function），记作 $\sin\alpha$，即

$$y=\sin\alpha;$$

（2）把点 $P$ 的横坐标 $x$ 叫做 $\alpha$ 的**余弦函数**（cosine function），记作 $\cos\alpha$，即

$$x=\cos\alpha;$$

（3）把点 $P$ 的纵坐标与横坐标的比值 $\frac{y}{x}$ 叫做 $\alpha$ 的**正切**，记作 $\tan\alpha$，即

$$\frac{y}{x}=\tan\alpha(x\neq0).$$

可以看出，当 $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，$\alpha$ 的终边在 $y$ 轴上，这时点 $P$ 的横坐标 $x$ 等于 0，所以 $\frac{y}{x}=\tan\alpha$ 无意义. 除此之外，对于确定的角 $\alpha$，$\frac{y}{x}$ 的值也是唯一确定的. 所以，$\frac{y}{x}=\tan\alpha(x\neq0)$ 也是以角为自变量，以单位圆上点的纵坐标与横坐标的比值为函数值的函数，称为**正切函数**（tangent function）.

我们将正弦函数、余弦函数和正切函数统称为**三角函数**（trigonometric function），通常将它们记为：

正弦函数　$y=\sin x$，$x\in\mathbf{R}$；

余弦函数　$y=\cos x$，$x\in\mathbf{R}$；

正切函数　$y=\tan x$，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

## 探究

在初中我们学了锐角三角函数，知道它们都是以锐角为自变量，以比值为函数值的函数. 设 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，把按锐角三角函数定义求得的锐角 $x$ 的正弦记为 $z_1$，并把按本节三角函数定义求得的 $x$ 的正弦记为 $y_1$. $z_1$ 与 $y_1$ 相等吗？对于余弦、正切也有相同的结论吗？

**例 1**　求 $\frac{5\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值.

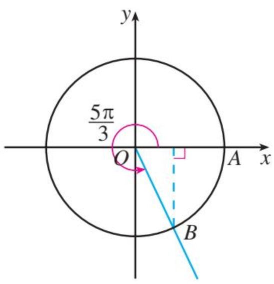

图 5.2-3

**解**：在直角坐标系中，作 $\angle AOB=\frac{5\pi}{3}$（图 5.2-3）. 易知 $\angle AOB$ 的终边与单位圆的交点坐标为 $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 所以，

$$\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

$$\tan\frac{5\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

**例 2** 如图 5.2-4，设 $\alpha$ 是一个任意角，它的终边上任意一点 $P$（不与原点 $O$ 重合）的坐标为 $(x, y)$，点 $P$ 与原点的距离为 $r$. 求证：$\sin\alpha=\frac{y}{r}$，$\cos\alpha=\frac{x}{r}$，$\tan\alpha=\frac{y}{x}$.

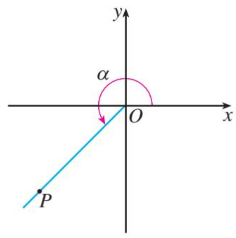

图 5.2-4

**分析：** 观察图 5.2-5，由 $\triangle OMP \backsim \triangle OM_0P_0$，根据三角函数的定义可以得到证明.

**证明：** 如图 5.2-5，设角 $\alpha$ 的终边与单位圆交于点 $P_0(x_0, y_0)$. 分别过点 $P$，$P_0$ 作 $x$ 轴的垂线 $PM$，$P_0M_0$，垂足分别为 $M$，$M_0$，则

$$|P_0M_0|=|y_0|,\ |PM|=|y|,$$
$$|OM_0|=|x_0|,\ |OM|=|x|,$$
$$\triangle OMP \backsim \triangle OM_0P_0.$$

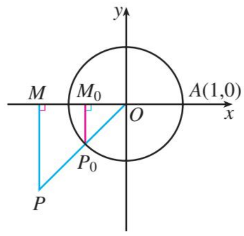

图 5.2-5

于是

$$\frac{|P_0M_0|}{1}=\frac{|PM|}{r},$$

即

$$|y_0|=\frac{|y|}{r}.$$

因为 $y_0$ 与 $y$ 同号，所以

$$y_0=\frac{y}{r},$$

即

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}.$$

同理可得

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\ \tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

根据勾股定理，$r=\sqrt{x^2+y^2}$. 由例 2 可知，只要知道角 $\alpha$ 终边上任意一点 $P$ 的坐标，就可以求得角 $\alpha$ 的各个三角函数值，并且这些函数值不会随 $P$ 点位置的改变而改变.

## 练习

1. 利用三角函数定义，求 $0$，$\frac{\pi}{2}$，$\pi$，$\frac{3\pi}{2}$ 的三个三角函数值.

2. 利用三角函数定义，求$\frac{7\pi}{6}$的三个三角函数值.

3. 已知角 $\theta$ 的终边过点 $P(-12, 5)$，求角 $\theta$ 的三角函数值.

4. 已知点 $P$ 在半径为 2 的圆上按顺时针方向做匀速圆周运动，角速度为 1 rad/s. 求 2 s 时点 $P$ 所在的位置.