1.4.2 用空间向量研究距离、夹角问题

我们知道，立体几何中的距离问题包括点到直线、点到平面、两条平行直线以及两个平行平面的距离问题等．如何用空间向量解决这些距离问题呢？

下面我们先研究用向量方法求直线 l 外一点 P 到直线 l 的距离．

探究

已知直线 l 的单位方向向量为 $\boldsymbol{u}$，A 是直线 l 上的定点，P 是直线 l 外一点．如何利用这些条件求点 P 到直线 l 的距离？

如图 1.4-16，向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量为 $\overrightarrow{AQ}$，则 $\triangle APQ$ 是直角三角形．因为 A，P 都是定点，所以 $|\overrightarrow{AP}|$，$\overrightarrow{AP}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角 $\angle PAQ$ 都是确定的．于是可求 $|\overrightarrow{AQ}|$．再利用勾股定理，可以求出点 P 到直线 l 的距离 PQ．

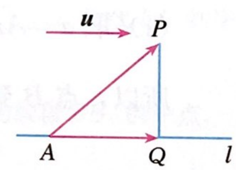


图 1.4-16

设 $\overrightarrow{AP}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\overrightarrow{AP}$ 在直线 l 上的投影向量 $\overrightarrow{AQ}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$．在 $\mathrm{Rt}\triangle APQ$ 中，由勾股定理，得

$$PQ=\sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{AQ}|^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}.$$

思考

类比点到直线的距离的求法，如何求两条平行直线之间的距离？

我们再来看平面 α 外一点 P 到平面 α 的距离问题．

如图 1.4-17，已知平面 α 的法向量为 $\boldsymbol{n}$，A 是平面 α 内的定点，P 是平面 α 外一点．过点 P 作平面 α 的垂线 l，交平面 α 于点 Q，则 $\boldsymbol{n}$ 是直线 l 的方向向量，且点 P 到平面 α

的距离就是$\overrightarrow{AP}$在直线l上的投影向量$\overrightarrow{QP}$的长度. 因此

$$PQ=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$

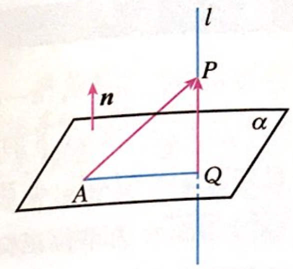


图 1.4-17

类似地，请同学们研究如何求两个平行平面的距离.

例 6 如图 1.4-18，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 A_1B_1 的中点，F 为线段 AB 的中点.

(1) 求点 B 到直线 AC_1 的距离；

(2) 求直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.

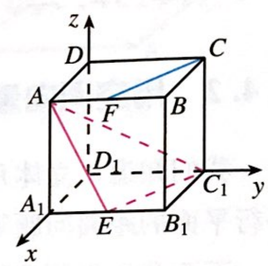


图 1.4-18

分析：根据条件建立空间直角坐标系，用坐标表示相关的点、直线的方向向量和平面的法向量，再利用有关公式，通过坐标运算得出相应的距离.

解：以 D_1 为原点，D_1A_1，D_1C_1，D_1D 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图 1.4-18 所示的空间直角坐标系，则 $A(1,\ 0,\ 1)$，$B(1,\ 1,\ 1)$，$C(0,\ 1,\ 1)$，$C_1(0,\ 1,\ 0)$，$E\left(1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，$F\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$，所以

$$\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{AC_1}=(-1,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{AE}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ -1\right),$$

$$\overrightarrow{EC_1}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ \overrightarrow{FC}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 0\right),\ \overrightarrow{AF}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right).$$

(1) 取 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{u}=\frac{\overrightarrow{AC_1}}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}(-1,\ 1,\ -1)$，则 $\boldsymbol{a}^2=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以，点 B 到直线 AC_1 的距离为

$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(2) 因为 $\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC_1}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$，所以 $FC/\!/EC_1$，所以 $FC/\!/$平面 AEC_1. 所以点 F 到平面 AEC_1 的距离即为直线 FC 到平面 AEC_1 的距离.

设平面 AEC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC_1}=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}\frac{1}{2}y-z=0,\\ -x+\frac{1}{2}y=0.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x=z, \\ y=2z. \end{cases}$$

取 $z=1$，则 $x=1$，$y=2$. 所以，$\boldsymbol{n}=(1, 2, 1)$ 是平面 AEC_1 的一个法向量.

又因为 $\overrightarrow{AF}=\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$，所以点 F 到平面 AEC_1 的距离为

$$\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)\cdot(1, 2, 1)\right|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

即直线 FC 到平面 AEC_1 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{6}$.

与用平面向量解决平面几何问题的“三步曲”类似，我们可以得出用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”：

（1）建立立体图形与空间向量的联系，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题；

（2）通过向量运算，研究点、直线、平面之间的位置关系以及它们之间的距离和夹角等问题；

（3）把向量运算的结果“翻译”成相应的几何结论.

练习

1. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，点 A 到平面 B_1C 的距离等于________；直线 DC 到平面 AB_1 的距离等于________；平面 DA_1 到平面 CB_1 的距离等于________.

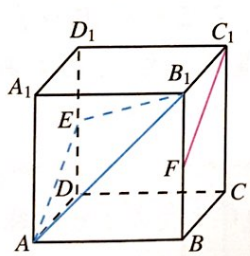
2. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 DD_1 的中点，F 为线段 BB_1 的中点.

   （1）求点 A_1 到直线 B_1E 的距离；

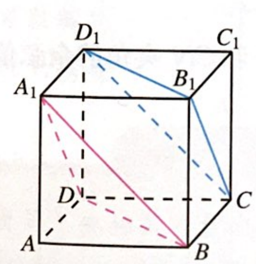
   （2）求直线 FC_1 到直线 AE 的距离；

   （3）求点 A_1 到平面 AB_1E 的距离；

   （4）求直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，求平面 A_1DB 与平面 D_1CB_1 的距离.